

TECNICAS DE INTEGRACION

Tenemos varias herramientas para integrar funciones matemáticas que llegan a ser complejas o no tan evidentes y directas con los teoremas que hemos visto en clase. Estas técnicas las podemos clasificar como sigue:

- 1) Sustitución de variables
- 2) Integración por partes
- 3) Integración de potencias de funciones trigonométricas
- 4) Integración por sustitución trigonométrica
- 5) Fracciones parciales

A continuación, vamos a explicar de qué se trata y cómo funciona cada una de ellas.

SUSTITUCION DE VARIABLES

No hay mucho escrito sobre el uso de ésta técnica en los libros más que uno mismo se enseñe a probar primero con ésta técnica antes que ir con las demás. Mi consejo es que cuando veamos una integral, primero hagamos el ejercicio en la cabeza y, para probar si la integral es candidata a resolverse por ésta técnica, tomemos el numerador del integrando y lo derivemos para ver si podemos formar la **du** con lo que sobra.

Yo siempre estoy pensando en la fórmula directa:

$$\int u^n du = \begin{cases} \frac{u^{n+1}}{n+1} + C & \text{para } n \neq -1 \\ \ln|u| + C & \text{para } n = -1 \end{cases}$$

A la **du** que aparece ahí es a la que me refiero en todo lo escrito en éstas hojas.

TRUCOS:

- 1) Recuerda tener siempre en mente que puedes sumar y restar al mismo tiempo, en el numerador, funciones que hacen que puedas separar el integrando en dos fracciones que sean más evidentes para integrar. VEASE EJEMPLO CHIDO1 MÁS ABAJO.
- 2) Cuando tenemos dos o más raíces de diferentes potencias sea en el numerador o denominador o ambos, usaremos siempre la sustitución: $x = z^n$ y entonces $dx = n \cdot z^{n-1} \cdot dz$ donde n es el mínimo común denominador entre las potencias de las raíces.

Con la técnica de Sustitución de Variables, dependiendo de la sustitución nos salen resultados diferentes. En los siguientes tres ejemplos vamos a demostrar, por dos métodos diferentes, que tales resultados diferentes no difieren más allá que en la constante de integración.

Método 1:
desarrollemos el cuadrado

$$\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} dx \xrightarrow{\text{hacemos la división}} \int (x^{1/2} - 2 + x^{-1/2}) dx$$

$$= \int x^{1/2} dx - 2 \int dx + \int x^{-1/2} dx = \boxed{\frac{2}{3} x^{3/2} - 2x + 2x^{1/2} + C}$$

Método 2:
usar la sustitución
 $u = \sqrt{x} - 1$
 $du = \frac{1}{2} x^{-1/2} dx$

no parecen iguales

$$= 2 \int \frac{1}{2} \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} dx = 2 \int u^2 du = \frac{2}{3} u^3 + C' = \boxed{\frac{2}{3} (\sqrt{x}-1)^3 + C'}$$

DEMOSTRACIÓN

Desarrollando: $(\sqrt{x}-1)^3 = x^{3/2} - 3x + 3x^{1/2} - 1$ Fórmula binomio al cubo

Entonces,

$$\frac{2}{3} (\sqrt{x}-1)^3 + C' = \underbrace{\frac{2}{3} x^{3/2} - 2x + 2x^{1/2} - \frac{2}{3}}_{\text{el resultado anterior}} + C' \quad \therefore C = C' - \frac{2}{3}$$

Método 1:
usamos la sustitución
 $u = \cot x$
Por lo que, $du = -\csc^2 x dx$

$$\int \csc^2 x \cdot \cot x dx \xrightarrow{\text{Método 1: usamos la sustitución}} = - \int u du = -\frac{u^2}{2} + C = \boxed{-\frac{\cot^2 x}{2} + C}$$

Demstración.

Ya que $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

$$-\frac{\csc^2 x}{2} + C' = -\frac{1 + \cot^2 x}{2} + C'$$

Método 2:
usamos la sustitución
 $v = \csc x$
 $dv = -\cot x \cdot \csc x dx$

$$= - \int v dv = -\frac{v^2}{2} + C' = \boxed{-\frac{\csc^2 x}{2} + C'}$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{\cot^2 x}{2} + C'$$

el primer resultado $\therefore C = C' - \frac{1}{2}$

~~—~~ $\int (2x+1)^3 dx$ Método 1: basta desarrollar el cubo $\rightarrow \int (8x^3 + 12x^2 + 6x + 1) dx$

Método 2:
usamos la
sustitución

$u = 2x + 1$
 $du = 2dx$
 $\hookrightarrow dx = \frac{du}{2}$

$\downarrow \int = \frac{1}{2} \int u^3 du = \frac{1}{8} u^4 + C' = \frac{1}{8} (2x+1)^4 + C'$

otra vez no parecen resultados iguales

DEMOSTRACIÓN

Desarrollando $(2x+1)^4 = 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1$

Por tanto,

$\frac{1}{8} (2x+1)^4 + C' = \frac{1}{8} (16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1) + C' = \frac{2x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x + \frac{1}{8}}{1} + C'$
 $\therefore C = C' + \frac{1}{8}$ Mismo resultado + C'

Un ejercicio misceláneo:

hacemos la sustitución

~~—~~ $\int \sec x \cdot \tan x \cdot \cos(\sec x) dx$ $\xrightarrow{u = \sec x, du = \sec x \cdot \tan x dx}$ $\int \cos u du = \sin u + C$
 $= \sin(\sec x) + C$

Conviene probar primero hacer u lo que está entre paréntesis en funciones trigonométricas para ver si tenemos la du

¿parecía muy difícil?
Naaaa !!

Más ejercicios de identificación de u y du

→ Cuando tenemos raíces, hay que probar primero hacer u lo que está DENTRO de la raíz y como segunda prueba, hacer u a TODA la raíz. Veamos:

~~—~~ $\int \sqrt{3+s} (s+1)^2 ds$ $\xrightarrow{\text{desarrollando}}$ $\int u^{1/2} (u-2)^2 du = \int u^{1/2} (u^2 - 4u + 4) du = \int (u^{5/2} - 4u^{3/2} + 4u^{1/2}) du$
Escogemos $u = 3+s$
Por lo tanto, $du = ds$ y $s = u-3$
 $s+1 = (u-3)+1 = u-2$
 $= \frac{2}{7} u^{7/2} - 4 \left(\frac{2}{5} u^{5/2} \right) + 4 \left(\frac{2}{3} u^{3/2} \right) + C$
 $= \frac{2}{7} (3+s)^{7/2} - \frac{8}{5} (3+s)^{5/2} + \frac{4}{3} (3+s)^{3/2} + C$

$$\int \frac{(r^{1/3} + 2)^4}{\sqrt[3]{r^2}} dr = 3 \int \frac{1}{3} \frac{(r^{1/3} + 2)^4}{\sqrt[3]{r^2}} dr = 3 \int (u+2)^4 du = 3 \left[\frac{(u+2)^{4+1}}{4+1} \right] + C$$

Escogemos como u toda la raíz
 Por lo tanto, $u = r^{1/3}$
 $du = \frac{1}{3} r^{-2/3} dr = \left(\frac{1}{3} \right) \frac{1}{\sqrt[3]{r^2}} dr$

para completar du

$$= \frac{3}{5} (u+2)^5 + C$$

$$= \boxed{\frac{3}{5} (r^{1/3} + 2)^5 + C}$$

Llegó el momento de un:

EJEMPLO CHIDO1

$$\int \frac{2x^5 + 3x^2}{\sqrt{1+2x^3}} dx$$

Primero me doy cuenta que esta integral la puedo escribir como:

$$= \int \frac{2x^5 + x^2 + 2x^2}{\sqrt{2x^3+1}} dx = \int \frac{x^2(2x^3+1) + 2x^2}{\sqrt{2x^3+1}} dx$$

Para factorizar así

Entonces,

$$= \int \frac{x^2(2x^3+1)}{\sqrt{2x^3+1}} dx + \int \frac{2x^2}{\sqrt{2x^3+1}} dx = \int x^2 \sqrt{2x^3+1} dx + 2 \int \frac{x^2}{\sqrt{2x^3+1}} dx$$

Lo hacemos con mucho calor
 Para separar en 2 fracciones y eliminar términos que simplifiquen

Identificamos que $u = 2x^3+1$ y por lo tanto $du = 6x^2 dx$

$$= \frac{1}{6} \int 6x^2 \sqrt{2x^3+1} dx + \frac{2}{6} \int \frac{6x^2}{\sqrt{2x^3+1}} dx = \frac{1}{6} \int u^{1/2} du + \frac{1}{3} \int \frac{du}{u^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3} u^{3/2} \right) + \frac{1}{3} \left(2 u^{1/2} \right) + C = \boxed{\frac{1}{9} (2x^3+1)^{3/2} + \frac{2}{3} (2x^3+1)^{1/2} + C}$$

$$\int \frac{dx}{2\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} = \int \frac{(6z^5 dz)}{2\sqrt[3]{z^6} + \sqrt{z^6}} = \int \frac{6z^5 dz}{2z^2 + z^3} = \int \frac{6z^3}{2+z} dz = 6 \int \frac{(u-2)^3}{u} du$$

Usamos $x = z^n$ donde $n=6$
 $x = z^6$
 $dx = 6z^5 dz$

6 es el común denominador de 2 y 3

Factorizamos "z" en el numerador y denominador y se eliminan

Hacemos OTRA SUSTITUCIÓN:
 $u = 2+z$
 Por lo que,
 $z = u-2$
 y $du = dz$

desarrollamos $(u-2)^3$

$$= 6 \int \frac{u^3 - 6u^2 + 12u - 8}{u} du = 6 \int \left(u^2 - 6u + 12 - \frac{8}{u} \right) du$$

continúa en la siguiente página

$$= 6 \left[\int v^2 dv - 6 \int v dv + 12 \int dv - 8 \int \frac{dv}{v} \right] = 6 \left[\frac{v^3}{3} - 3v^2 + 12v - 8 \ln v \right] + C$$

Volviendo a "z", ya que $v = 2+z$

$$= 2(2+z)^3 - 18(2+z)^2 + 72(2+z) - 48 \ln(2+z) + C$$

Volviendo a la variable original "x", donde $z = x^{1/6}$

$$= 2(2+x^{1/6})^3 - 18(2+x^{1/6})^2 + 72(2+x^{1/6}) - 48 \ln(2+x^{1/6}) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x} - \sqrt{x+4}} \cdot \frac{\sqrt{2x} + \sqrt{x+4}}{\sqrt{2x} + \sqrt{x+4}} = \int \frac{\sqrt{2x} + \sqrt{x+4}}{x-4} dx = \int \frac{\sqrt{2x}}{x-4} dx + \int \frac{\sqrt{x+4}}{x-4} dx$$

Multiplicamos por el FACTOR UNIDAD para llevar las raíces al numerador

Hacemos DOS sustituciones diferentes, para cada integral

$u = \sqrt{2x}$ entonces, $x = \frac{u^2}{2}$ $dx = u du$	$w = \sqrt{x+4}$ entonces, $x = w^2 - 4$ $dx = 2w dw$
--	--

$$= \int \frac{\frac{u^2}{2}}{\frac{u^2}{2} - 4} (u du) + \int \frac{w}{w^2 - 4 - 4} (2w dw) = 2 \int \frac{u^2}{u^2 - 8} du + 2 \int \frac{w^2}{w^2 - 8} dw$$

Aplicamos truco:

$$= 2 \int \frac{u^2 - 8 + 8}{u^2 - 8} du + 2 \int \frac{w^2 - 8 + 8}{w^2 - 8} dw = 2 \int \left(1 + \frac{8}{u^2 - 8}\right) du + 2 \int \left(1 + \frac{8}{w^2 - 8}\right) dw$$

Las integrales $\int \frac{1}{u^2 - 8} du$ ó $\int \frac{1}{w^2 - 8} dw$ se resuelven con la fórmula

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{u-a}{u+a} + C \quad \text{donde } a = \sqrt{8} \text{ en nuestro caso}$$

Entonces,

$$= 2u + \frac{16}{2\sqrt{8}} \ln \frac{u - \sqrt{8}}{u + \sqrt{8}} + 2w + \frac{16}{2\sqrt{8}} \ln \frac{w - \sqrt{8}}{w + \sqrt{8}} + C$$

Volviendo a la variable original "x", (y simplificando un poco)

$$= 2\sqrt{2x} + \frac{8}{\sqrt{8}} \ln \frac{\sqrt{2x} - \sqrt{8}}{\sqrt{2x} + \sqrt{8}} + 2\sqrt{x+4} + \frac{8}{\sqrt{8}} \ln \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{8}}{\sqrt{x+4} + \sqrt{8}} + C$$

$$= 2(\sqrt{2x} + \sqrt{x+4}) + \sqrt{8} \ln \left(\frac{\sqrt{2x} - \sqrt{8}}{\sqrt{2x} + \sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{8}}{\sqrt{x+4} + \sqrt{8}} \right) + C$$

Dos ejemplos más donde llegamos al mismo resultado escogiendo diferentes sustituciones y un ejemplo donde no parece evidente que llegamos al mismo resultado.

Método 1.
 Hacemos la sustitución $x = z^2$
 Por tanto, $dx = 2z dz$

$$\int \frac{dx}{x - \sqrt{x}} = \int \frac{2z dz}{z^2 - \sqrt{z^2}} = \int \frac{2z dz}{z^2 - z} = 2 \int \frac{dz}{z - 1} = 2 \ln(z - 1) + C$$
 Factorizamos una "z" del numerador y denominador y la eliminamos

Método 2.
 Hacemos la sustitución $u = \sqrt{x} - 1$
 $du = \frac{1}{2} x^{-1/2} dx$
 Nótese que $\frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}$ se puede escribir como $\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} = 2 \int \frac{\frac{1}{2} dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} = 2 \int \frac{du}{u} = 2 \ln u + C = 2 \ln(\sqrt{x} - 1) + C$$
 para completar la du

Método 1.
 Sustitución $u = \sqrt{x} + 1$
 también la podemos escribir como:
 $u^2 = \sqrt{x} + 1$
 Por lo tanto, $\sqrt{x} = u^2 - 1$
 Y $dx = 4u(u^2 - 1) du$ ← COMPROBARLO!!

Método 2.
 Ahora escogamos mejor,
 $u = \sqrt{x} + 1 \rightarrow \sqrt{x} = u - 1$
 $du = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \frac{1}{u-1} dx \rightarrow dx = 2(u-1) du$

$$= \int \frac{2(u-1) du}{\sqrt{u}} = 2 \int (u^{1/2} - u^{-1/2}) du = 2 \int u^{1/2} du - 2 \int u^{-1/2} du$$

$$= 2 \left(\frac{2}{3} u^{3/2} \right) - 2 \left(2 u^{1/2} \right) + C = \frac{4}{3} u^{3/2} - 4 u^{1/2} + C$$

$$= \frac{4}{3} (\sqrt{x} + 1)^{3/2} - 4 (\sqrt{x} + 1)^{1/2} + C$$

Método 1.
Hacemos la sustitución: $x = \frac{1}{z}$
Por lo que, $dx = -\frac{1}{z^2} dz$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}} = \int \frac{\left(-\frac{1}{z^2} dz\right)}{\frac{1}{z} \sqrt{\left(\frac{1}{z}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{z}\right) + 1}} = - \int \frac{1}{z} \frac{1}{\sqrt{\frac{1+2z+z^2}{z^2}}} dz$$

ponemos todo en el mismo denominador

$$= - \int \frac{1}{\sqrt{1+2z+z^2}} dz = - \int \frac{dz}{\sqrt{2-(1-z)^2}}$$

En este punto aplicamos la fórmula: $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$
con $u = 1-z$ y $a = \sqrt{2}$

$$= \sin^{-1} \frac{1-z}{\sqrt{2}} + C$$

Notese que $du = -dz$ y el signo menos (-) ya no aparece al final

$$= \sin^{-1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + C = \boxed{\sin^{-1} \frac{x-1}{\sqrt{2}x} + C}$$

Método 2.
Hagamos una sustitución locochona, rara:
 $\sqrt{x^2+2x-1} = z-x$ (*)
Despejando a x de esta ecuación:
 $x = \frac{z^2+1}{2z+2}$ **COMPRUEBALO!**

Diferenciando en ambos lados de (*)

$$\frac{1}{2} \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x-1}} dx = dz - dx$$

o bien

$$\frac{1}{2} \frac{2x+2}{z-x} dx = dz - dx$$

Despejando a dx :

$$dx = \frac{2(z-x)}{2+2z} dz$$

COMPRUEBALO!!

Sustituyendo variables:

$$= \int \left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{z^2+1}{2z+2}} \right) \frac{1}{z-x} \left(\frac{2(z-x)}{2+2z} dz \right)$$

$$= 2 \int \frac{dz}{z^2+1} = 2 \tan^{-1} z + C$$

Aquí ocupamos la fórmula:

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$$

con $u=z$ y $a=1$

$$= \boxed{2 \tan^{-1} (x + \sqrt{x^2+2x-1}) + C}$$

De (*) despejamos a "z": $z = x + \sqrt{x^2+2x-1}$

No dió el mismo resultado, pero deberíamos comprobar que ambas expresiones no difieren mas que en la constante de integración.
¿Lo puedes demostrar?

INTEGRACION POR PARTES

¿Recuerdas la fórmula para derivar el producto de dos funciones?

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

Si aplicamos el operador integral en ambos lados de la ecuación:

$$\int \frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] dx = \int f(x) \cdot g'(x) dx + \int g(x) \cdot f'(x) dx$$

En el lado izquierdo de la ecuación se cancelan los operadores integral y derivada (porque son inversos) y nos queda:

$$f(x) \cdot g(x) = \int f(x) \cdot g'(x) dx + \int g(x) \cdot f'(x) dx$$

Y despejando el primer término de la derecha:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x) dx$$

Si identificamos a $u = f(x)$ y $v = g(x)$ y por tanto $du = f'(x)dx$ y $dv = g'(x)dx$, entonces podemos escribir la ecuación anterior como:

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}$$

Nuestra famosa fórmula de **integración por partes** :-)

El chiste de ésta técnica es escoger una u y una dv apropiadas que nos lleven a una integral $\int v \cdot du$ que sea más fácil de resolver que la primera (o sea que $\int u \cdot dv$).

AQUÍ LES PASO MIS TRUCOS FAVORITOS:

1. Si hay una función exponencial SIEMPRE ponerla como dv .

Nota: cuidar que $dv = e^u du$, es decir que u tenga su diferencial completa!

Ejemplo: $\int 2x^3 e^{x^2} dx$

$$u = 2x^3$$

MAL!!

$$dv = e^{x^2} dx$$

$$u = x^2$$

EXCELENTE!!

$$dv = 2xe^{x^2} dx$$

2. Si hay una función logarítmica SIEMPRE ponerla como u . También con funciones trigonométricas inversas, hiperbólicas e hiperbólicas inversas.

3. Si hay una función polinomial y no aplica la regla 2, entonces la escogemos como u .

4. El problema de las funciones trigonométricas es que no hay regla segura de donde ponerlas. Pero por experiencia, hay que probar primero poniéndolas como dv (SOLO SI NO APLICA LA REGLA 1). Acuértese que hay que cuidar que $dv = f(u)du$ donde f es sen, cos, tan, cot, sec o csc.

Ejemplo: $\int 5x^3 \cdot \sec^2(x^3 - 2)dx$

$$u = 5x^3$$

MAL!!

$$u = \frac{5}{3}x$$

EXCELENTE!!

$$dv = \sec^2(x^3 - 2)dx$$

$$dv = 3x^2 \cdot \sec^2(x^3 - 2)dx$$

EJERCICIOS SELECTOS

$$\int x \cdot 3^x dx = \frac{x \cdot 3^x}{\ln 3} - \int \frac{3^x}{\ln 3} dx = \frac{x \cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln^2 3} + C$$

Escogemos:

$$u = x$$

$$dv = 3^x dx$$

Y por tanto:

$$du = dx$$

$$v = \frac{3^x}{\ln 3}$$

constante,
sale fuera
de la integral

Recuerda que:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx = x(\ln x)^2 - 2 \left[x \ln x - \int dx \right]$$

Escogemos:

$$u = (\ln x)^2$$

$$dv = dx$$

Y por tanto:

$$du = 2 \ln x \left(\frac{1}{x} dx \right)$$

$$v = x$$

se cancelan
al multiplicarse

Volvemos a aplicar

INTEGRACION POR

PARTES:

$$\begin{array}{l|l} u = \ln x & du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx & v = x \end{array}$$

esta
integral
ya es
super fácil

$$= x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$$

→ Varias integrales requieren aplicar varias veces Integración por Partes.

¿Cuántas? cuando escoges a u como: $u = [f(x)]^n$
Verás que repetirás la técnica "n" veces

¡pero que se
vea que la inte-
gral se va haciendo
más fácil!!

$$\int \overset{u \cdot dv}{\sin(\ln x)} dx = \overset{v \cdot u}{x \sin(\ln x)} - \int \overset{v \cdot du}{\cos(\ln x)} dx$$

Escogemos: Por lo tanto:

$$u = \sin(\ln x) \quad du = \cos(\ln x) \left(\frac{1}{x} dx \right)$$

$$dv = dx \quad v = x \quad \leftarrow \text{se cancelan}$$

Volvemos a aplicar la técnica:

$$u = \cos(\ln x) \quad \left| \begin{array}{l} du = -\sin(\ln x) \left(\frac{1}{x} dx \right) \\ dv = dx \\ v = x \end{array} \right.$$

$$= x \sin(\ln x) - \left[x \cos(\ln x) - \int \sin(\ln x) dx \right] \quad \leftarrow \text{¿Estamos dando vueltas?}$$

Entonces vemos que: $\int \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int \sin(\ln x) dx$

$$2 \int \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) \quad \leftarrow \text{la pasamos del otro lado en la ecuación}$$

$$\int \sin(\ln x) dx = \boxed{\frac{1}{2} x \sin(\ln x) - \frac{1}{2} x \cos(\ln x) + C}$$

$$\int \frac{\cot^{-1} \sqrt{z}}{\sqrt{z}} dz = 2\sqrt{z} \cot^{-1} \sqrt{z} + \int \frac{1}{1+z} dz = \boxed{2\sqrt{z} \cot^{-1} \sqrt{z} + \ln(1+z) + C}$$

Escogemos: Por lo tanto:

$$u = \cot^{-1} \sqrt{z} \quad du = -\frac{1}{1+z} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{z}} dz \right)$$

$$dv = \frac{1}{\sqrt{z}} dz \quad v = 2\sqrt{z} \quad \leftarrow \text{se cancelan}$$

Recuerda que

$\cot^{-1} \sqrt{z} \neq \tan \sqrt{z}$
Hay que ver en los apuntes las derivadas de funciones trigonométricas inversas

$$\int x^2 \sinh x dx = x^2 \cosh x - 2 \int x \cosh x dx$$

Escogemos: Por lo tanto:

$$u = x^2 \quad du = 2x dx$$

$$dv = \sinh x dx \quad v = \cosh x$$

Otra vez Integración por Partes:

$$u = x \quad du = dx$$

$$dv = \cosh x dx \quad v = \sinh x$$

$$= x^2 \cosh x - 2 \left[x \sinh x - \int \sinh x dx \right]$$

$$= \boxed{x^2 \cosh x - 2x \sinh x + 2 \cosh x + C}$$

INTEGRACION DE POTENCIAS DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Esta técnica se utiliza cuando la integral son puras funciones trigonométricas (el argumento puede ser otra función: exponencial, logarítmica, etc) elevadas a la misma o diferentes potencias.

Cuando tenemos sólo senos y cosenos, existen 3 casos:

CASO 1. $\int \sin^n x dx$ ó $\int \cos^m x dx$ donde m y/o n son enteros positivos IMPARES.

$$\begin{aligned}\text{Hacer } \int \sin^n x dx &= \int \sin^{n-1} x \cdot \sin x dx = \int (\sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \sin x dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \sin x dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{O bien } \int \cos^m x dx &= \int \cos^{m-1} x \cdot \cos x dx = \int (\cos^2 x)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \cos x dx \\ &= \int (1 - \sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \cos x dx\end{aligned}$$

¿Porqué? Nótese que al factorizar un $\sin x$ o $\cos x$ estamos formando la du y el número $n-1$ o $m-1$ es PAR y nos asegura que podamos usar siempre la identidad $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Las integrales resultantes se resuelven fácilmente, después de desarrollar los términos $(1 - \cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}}$ ó $(1 - \sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}}$, con las fórmulas de:

$$\int \sin^p u \cdot du = \frac{\sin^{p+1} u}{p+1} + C$$

$$\int \cos^p u \cdot du = \frac{\cos^{p+1} u}{p+1} + C$$

CASO 2. $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$ donde ya sea m ó n es un entero positivo IMPAR.

(i) Si n es IMPAR hacer $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx = \int \sin^{n-1} x \cdot \cos^m x \cdot \sin x dx$ y proseguir como en el Caso 1.

(ii) Si m es IMPAR hacer $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx = \int \sin^n x \cdot \cos^{m-1} x \cdot \cos x dx$ y proseguir como en el Caso 1.

CASO 3. $\int \sin^n x dx$ ó $\int \cos^m x dx$ ó $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$ donde AMBOS m y n son enteros positivos PARES.

$$\text{Factorizar } \sin^n x = (\sin^2 x)^{\frac{n}{2}} \text{ y } \cos^m x = (\cos^2 x)^{\frac{m}{2}}$$

$$\text{Y usar las identidades trigonométricas: } \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \text{ y } \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Y resolver después de desarrollar lo que salga.

En el caso de tener funciones tangente, cotangente, secante y/o cosecante en integrales de la forma:

$$\int \tan^m u \cdot \sec^n u \cdot du \quad \text{ó} \quad \int \cot^m u \cdot \csc^n u \cdot du$$

La estrategia es saber usar las identidades trigonométricas:

$$1 + \tan^2 u = \sec^2 u \quad \text{y} \quad 1 + \cot^2 u = \csc^2 u$$

CASO 1. $\int \tan^m u \cdot du$ ó $\int \cot^m u \cdot du$ (m es un número entero positivo)

$$\text{Hacemos } \tan^m u = \tan^{m-2} u \cdot \tan^2 u = \tan^{m-2} u \cdot (\sec^2 u - 1)$$

$$\text{ó} \quad \cot^m u = \cot^{m-2} u \cdot \cot^2 u = \cot^{m-2} u \cdot (\csc^2 u - 1)$$

con lo cual hemos formado la du de las funciones $\tan$ y $\cot$, lo ves?

CASO 2. $\int \sec^n u \cdot du$ ó $\int \csc^n u \cdot du$

(i) Si n es un entero PAR,

$$\text{hacemos } \sec^n u = \sec^{n-2} u \cdot \sec^2 u = (\tan^2 u + 1)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \sec^2 u$$

$$\text{ó} \quad \csc^n u = \csc^{n-2} u \cdot \csc^2 u = (\cot^2 u + 1)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \csc^2 u$$

(ii) Si n es un entero IMPAR, emplear INTEGRACION POR PARTES.

CASO 3. $\int \tan^m u \cdot \sec^n u \cdot du$ ó $\int \cot^m u \cdot \csc^n u \cdot du$ donde m es un entero positivo IMPAR ó PAR y n es PAR.

Convertir $\sec^n u$ ó $\csc^n u$ como en el caso 2 (i)

CASO 4. $\int \tan^m u \cdot \sec^n u \cdot du$ ó $\int \cot^m u \cdot \csc^n u \cdot du$ donde m es un entero positivo IMPAR y n es IMPAR.

$$\text{Hacemos } \int \tan^m u \cdot \sec^n u \cdot du = \int \tan^{m-1} u \cdot \sec^{n-1} u \cdot \tan u \cdot \sec u \cdot du$$

$$\text{ó} \quad \int \cot^m u \cdot \csc^n u \cdot du = \int \cot^{m-1} u \cdot \csc^{n-1} u \cdot \cot u \cdot \csc u \cdot du$$

y convertir $\tan^{m-1} u$ ó $\cot^{m-1} u$ usando las identidades $\tan^2 u = \sec^2 u - 1$ y $\cot^2 u = \csc^2 u - 1$. Con lo cual hemos formado la du de las funciones $\sec$ ($\tan u \cdot \sec u \cdot du$) y $\csc$ ($\cot u \cdot \csc u \cdot du$), lo ves en las integrales?

CASO 5. $\int \tan^m u \cdot \sec^n u \cdot du$ ó $\int \cot^m u \cdot \csc^n u \cdot du$ donde m es un entero positivo PAR y n es IMPAR.

Convertir $\tan^m u$ ó $\cot^m u$ a potencias impares de $\sec$ ó $\csc$ respectivamente y usar INTEGRACION POR PARTES.

EJERCICIOS SELECTOS

$\int \sqrt{\cos z} \sin^3 z \, dz$ $\text{sen}^2 z \cdot \text{sen} z = \text{sen}^3 z$

$n=3 \leftarrow \text{IMPAR}$
 $m=\frac{1}{2}$ CASO 2, (i)

$= \int (1 - \cos^2 z) \cos^{1/2} z (\text{sen} z \, dz)$ Para completar la du

$= - \int (\cos^{1/2} z - \cos^{5/2} z) (-\text{sen} z \, dz)$

$u = \cos z \text{ y } du = -\text{sen} z \, dz$

$= - \int u^{1/2} du + \int u^{5/2} du = -\frac{2}{3} u^{3/2} + \frac{2}{7} u^{7/2} + C = -\frac{2}{3} \cos^{3/2} z + \frac{2}{7} \cos^{7/2} z + C$

$\int \sin^2\left(\frac{1}{2}x\right) \cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) dx = \int \left(\frac{1 - \cos x}{2}\right) \left(\frac{1 + \cos x}{2}\right) dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 x) dx$

$n=2 \leftarrow \text{PAR}$
 $m=2 \leftarrow \text{PAR}$ CASO 3, (iii)

$= \frac{1}{4} \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 2x \, dx$

$n=2$ CASO 3, (i)

$= \frac{1}{8} x - \frac{1}{16} \sin 2x + C = \frac{1}{8} x - \frac{1}{8} \sin x \cdot \cos x + C$

$\text{si usamos } \sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$

$\int \frac{\tan^4 y}{\sec^5 y} dy = \int \frac{\text{sen}^4 y}{\cos^4 y} \cdot \cos^5 y \, dy = \int \text{sen}^4 y \cdot \cos y \, dy = \int u^4 du$

Identificando:
 $u = \text{sen} y \text{ y } du = \cos y \, dy$

$= \frac{1}{5} u^5 + C = \frac{1}{5} \text{sen}^5 y + C$

$$\int e^x \tan^4(e^x) dx = \int \tan^4 u \cdot du = \int \tan^2 u (\overbrace{\sec^2 u - 1}^{\tan^2 u \cdot \tan^2 u = \tan^4 u}) du$$

Primero hagamos una sustitución de variable para ver mejor cómo es esta integral: $u = e^x$, por tanto, $du = e^x dx$

$n=4 \leftarrow \text{PAR}$
CASO 1 ~~(4)~~ $= \int \tan^2 u \cdot \sec^2 u du - \int \tan^2 u du$

$$= \int \tan^2 u \cdot \sec^2 u \cdot du - \int (\sec^2 u - 1) du = \int \underbrace{\tan^2 u \cdot \sec^2 u \cdot du}_{\substack{w = \tan u \\ dw = \sec^2 u du}} - \int \sec^2 u \cdot du + \int du$$

$$= \frac{1}{3} \tan^3 u - \tan u + u + C = \boxed{\frac{1}{3} \tan^3 e^x - \tan e^x + e^x + C}$$

$$\int (\sec 5x + \csc 5x)^2 dx = \int (\sec^2 5x + 2 \sec 5x \csc 5x + \csc^2 5x) dx$$

$$= \int \sec^2 5x dx + 2 \int \sec 5x \cdot \csc 5x dx + \int \csc^2 5x dx$$

La primera y tercera integral se resuelven directamente. Trabajemos por separado la segunda:

$$\begin{aligned} \int \sec 5x \cdot \csc 5x dx &= \int \sec 5x \frac{\csc 5x}{\csc 5x} \csc 5x dx = \int \frac{\sec 5x}{\csc 5x} \csc^2 5x dx \\ &= \int \tan 5x \cdot \csc^2 5x dx = \int \tan 5x (1 + \cot^2 5x) dx \quad \frac{\sec 5x}{\csc 5x} = \left(\frac{1}{\cos 5x} \right) \left(\frac{\sin 5x}{1} \right) = \tan 5x \\ &= \int (\tan 5x + \cot 5x) dx = \int \tan 5x dx + \int \cot 5x dx \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\int \sec^2 5x dx}_{\frac{1}{5} \tan 5x} + 2 \underbrace{\int \tan 5x dx}_{\frac{2}{5} \ln(\sec 5x)} + 2 \underbrace{\int \cot 5x dx}_{\frac{2}{5} \ln(\sin 5x)} + \underbrace{\int \csc^2 5x dx}_{-\frac{1}{5} \cot 5x} + C \\ &= \frac{1}{5} \tan 5x + \frac{2}{5} \ln(\sec 5x) + \frac{2}{5} \ln(\sin 5x) - \frac{1}{5} \cot 5x + C \\ &= \boxed{\frac{1}{5} \tan 5x + \frac{2}{5} \ln(\tan 5x) - \frac{1}{5} \cot 5x + C} \end{aligned}$$

$\sec 5x \cdot \sin 5x = \frac{1}{\cos 5x} \cdot \sin 5x = \tan 5x$

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} \cdot \frac{1-\cos x}{1-\cos x} = \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} \right) dx$$

Si multiplicamos primero por este factor unidad, nos llevamos para arriba el " $1 \pm \cos x$ " para separarlo en fracciones

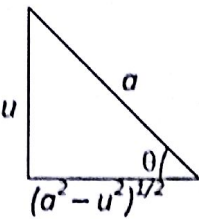
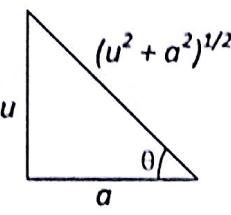
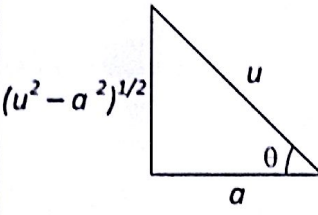
$$-\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} = -\cot x \cdot \csc x$$

$$= \int \csc^2 x dx + \int -\cot x \cdot \csc x dx$$

$$= \boxed{-\cot x + \csc x + C}$$

INTEGRACION POR SUSTITUCION TRIGONOMETRICA

Esta técnica se usa cuando identificamos expresiones de la forma $(a^2 - u^2)^n$, $(a^2 + u^2)^n$ ó $(u^2 - a^2)^n$ donde $n = \frac{1}{2}$ ó 1. Se puede usar con otros n enteros positivos pero conduce a integrales muy talachudas y es mejor intentar una sustitución de variable primero. Hay sólo 3 posibilidades:

Integrando	Sustitución trigonométrica	Triángulo	Valor de cada función trigonométrica*
$(a^2 - u^2)^n$	$u = a \cdot \sin \theta$		$\sin \theta = \frac{u}{a}$ $\cos \theta = \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a}$ $\tan \theta = \frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}}$ $\theta = \sin^{-1} \frac{u}{a}$
$(a^2 + u^2)^n$	$u = a \cdot \tan \theta$		$\sin \theta = \frac{u}{\sqrt{u^2 + a^2}}$ $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}}$ $\tan \theta = \frac{u}{a}$ $\theta = \tan^{-1} \frac{u}{a}$
$(u^2 - a^2)^n$	$u = a \cdot \sec \theta$		$\sin \theta = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u}$ $\cos \theta = \frac{a}{u}$ $\tan \theta = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a}$ $\theta = \sec^{-1} \frac{u}{a}$

*Recordemos que la $\cot$, $\sec$ y $\csc$ son las inversas del $\sin$, $\cos$ y $\tan$, respectivamente.

EJERCICIOS SELECTOS

$$\int \frac{dw}{w^2 \sqrt{w^2 - 7}} = \int \frac{(\sqrt{7} \sec \theta \cdot \tan \theta \cdot d\theta)}{(\sqrt{7} \sec \theta)^2 \sqrt{(\sqrt{7} \sec \theta)^2 - 7}} = \int \frac{\sqrt{7} \sec \theta \cdot \tan \theta \cdot d\theta}{7 \sec^2 \theta \sqrt{7 \sec^2 \theta - 7}}$$

Escogemos: $w = \sqrt{7} \sec \theta$
 Por tanto: $dw = \sqrt{7} \sec \theta \cdot \tan \theta \cdot d\theta$

$$= \int \frac{\sqrt{7} \sec \theta \cdot \tan \theta \cdot d\theta}{7 \sec^2 \theta \cdot \sqrt{7} \tan \theta} = \frac{1}{7} \int \frac{1}{\sec \theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{7} \int \cos \theta d\theta = \frac{1}{7} \sin \theta + C \xrightarrow{\text{usando tabla}} = \frac{1}{7} \frac{\sqrt{w^2 - 7}}{w} + C$$

$$\int \frac{e^{-x} dx}{(9e^{-2x} + 1)^{3/2}} = \int \frac{e^{-x} dx}{[(3e^{-x})^2 + 1]^{3/2}} = \int \frac{\left(\frac{\tan \theta}{3}\right)}{(\tan^2 \theta + 1)^{3/2}} \left(-\frac{\sec^2 \theta}{\tan \theta} d\theta\right) = -\frac{1}{3} \int \frac{\tan \theta \sec^2 \theta}{(\sec^2 \theta)^{3/2} \tan \theta} d\theta$$

Hacemos: $u = 3e^{-x} \rightarrow e^{-x} = \frac{u}{3} = \frac{\tan \theta}{3}$
 y como $u = a \tan \theta$
 entonces: $3e^{-x} = \tan \theta$
 $dx = -\frac{\sec^2 \theta}{\tan \theta} d\theta$ **Comprueba!!**

$$= -\frac{1}{3} \int \frac{\sec^2 \theta}{\sec^3 \theta} d\theta = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{\sec \theta} d\theta = -\frac{1}{3} \int \cos \theta d\theta$$

$$= -\frac{1}{3} \sin \theta + C \xrightarrow{\text{usando tabla}} = -\frac{1}{3} \frac{u}{\sqrt{u^2 + 1}} + C = -\frac{1}{3} \frac{3e^{-x}}{\sqrt{(3e^{-x})^2 + 1}} + C = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{9e^{-2x} + 1}} + C$$

$$\int \frac{\ln^3 w \cdot dw}{w \sqrt{\ln^2 w - 4}} = \int \frac{(2 \sec \theta)^3}{w \sqrt{(2 \sec \theta)^2 - 4}} \cdot 2 \sec \theta \cdot \tan \theta \cdot d\theta = \int \frac{8 \sec^3 \theta}{\sqrt{4 \sec^2 \theta - 4}} \cdot 2 \sec \theta \tan \theta \cdot d\theta$$

Hacemos $u = \ln w$
 y como $u = 2 \sec \theta$
 entonces $\ln w = 2 \sec \theta$
 Diferenciando:
 $\frac{1}{w} dw = 2 \sec \theta \tan \theta d\theta$
 $dw = 2w \sec \theta \tan \theta d\theta$

$$= \int \frac{8 \sec^3 \theta}{2 \tan \theta} \cdot 2 \sec \theta \tan \theta d\theta = 8 \int \sec^4 \theta d\theta = 8 \int (\tan^2 \theta + 1) \sec^2 \theta d\theta$$

$n=4 \leftarrow \text{PAR}$
 CASO 2

$$= 8 \int \tan^2 \theta \cdot \sec^2 \theta d\theta + 8 \int \sec^2 \theta d\theta$$

$v = \tan \theta$
 $\int v^2 dv$

$$= 8 \left(\frac{1}{3} \tan^3 \theta \right) + 8 \tan \theta + C \xrightarrow{\text{De la Tabla}} = \frac{8}{3} \left(\frac{\sqrt{\ln^2 w - 4}}{2} \right)^3 + 8 \left(\frac{\sqrt{\ln^2 w - 4}}{2} \right) + C$$

$\tan \theta = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a}$

$$= \frac{1}{3} (\ln^2 w - 4)^{3/2} + 4 (\ln^2 w - 4)^{1/2} + C$$

$$\int \frac{e^t dt}{(e^{2t} + 8e^t + 7)^{3/2}} \quad \text{primero observamos que el denominador se puede factorizar} = \int \frac{e^t dt}{[(e^t + 4)^2 - 9]^{3/2}}$$

$$= \int \frac{e^t (3 \sec \theta \cdot \tan \theta d\theta)}{[(3 \sec \theta)^2 - 9]^{3/2}} = \int \frac{3 \sec \theta \cdot \tan \theta d\theta}{(9 \sec^2 \theta - 9)^{3/2}}$$

$$\frac{9(\sec^2 \theta - 1) = 9 \tan^2 \theta}{9 \tan^2 \theta}$$

Hacemos $u = e^t + 4$
y como $u = a \sec \theta$
entonces $e^t + 4 = 3 \sec \theta$
Diferenciando:
 $e^t dt = 3 \sec \theta \cdot \tan \theta d\theta$
 $dt = \frac{3 \sec \theta \cdot \tan \theta d\theta}{e^t}$

$$= \int \frac{3 \sec \theta \cdot \tan \theta d\theta}{(3 \tan \theta)^3} = \frac{1}{9} \int \frac{\sec \theta}{\tan^2 \theta} d\theta = \frac{1}{9} \int \frac{1}{\cos \theta} \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} d\theta = \frac{1}{9} \int \frac{(\sin \theta)^{-2} \cos \theta d\theta}{v = \sin \theta \quad dv}$$

$$= \frac{1}{9} \int v^{-2} dv = -\frac{1}{9} v^{-1} + C = -\frac{1}{9} (\sin \theta)^{-1} + C = -\frac{1}{9} \csc \theta + C$$

De tablas: $\csc \theta = \frac{u}{\sqrt{u^2 - a^2}}$

$$= -\frac{1}{9} \frac{e^t + 4}{\sqrt{e^{2t} + 8e^t + 7}} + C$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 4)^2} = \int \frac{(2 \tan \theta)^2}{(4 \tan^2 \theta + 4)^2} 2 \sec^2 \theta d\theta = \int \frac{4 \tan^2 \theta}{(4 \sec^2 \theta)^2} 2 \sec^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \int \frac{\tan^2 \theta}{\sec^2 \theta} d\theta$$

Hacemos: $x = 2 \tan \theta \rightarrow x^2 = 4 \tan^2 \theta$
 $dx = 2 \sec^2 \theta d\theta$

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \cdot \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta = \frac{1}{4} \int d\theta - \frac{1}{4} \int \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{4} \theta - \frac{1}{8} \sin 2\theta + C$$

$$= \frac{1}{4} \theta - \frac{1}{4} \sin \theta \cdot \cos \theta + C$$

$$\frac{1}{2} \int \cos u du = \frac{1}{2} \sin u$$

De tabla:

$$= \frac{1}{4} \tan^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}} \right) + C$$

$$= \frac{1}{4} \tan^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x^2 + 4} \right) + C$$

FRACCIONES PARCIALES

Para poder utilizar esta técnica es necesario que en la integral de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, el grado de $P(x)$ sea menor que el grado de $Q(x)$. De lo contrario, hacemos división sintética primero. Después hay que FACTORIZAR $Q(x)$ como un producto de factores de potencias. Si esto no se puede hacer, tal integral no es candidata a resolverse por esta técnica!

Tenemos 4 casos para su aplicación:

CASO 1. Los factores de $Q(x)$ son todos de grado 1 y ninguno se repite. Es decir,

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots (a_nx + b_n)$$

$$\text{Entonces hacemos } \frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

Donde $A_1, A_2, \dots, A_n$ son las constantes que vamos a buscar en el siguiente paso.

Ejemplo.

$$\int \frac{(x-1)}{x^3-x^2-2x} dx \xrightarrow{\text{factorizar}} \int \frac{(x-1)}{(x^2-2x)(x+1)} dx = \int \left(\frac{A}{(x^2-2x)} + \frac{B}{x+1} \right) dx$$

MAL!!

$$\int \frac{(x-1)}{(x^2-2x)(x+1)} dx = \int \frac{(x-1)}{x(x-2)(x+1)} dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} \right) dx$$

EXCELENTE!!

CASO 2. Los factores de $Q(x)$ son todos de grado 1 y algunos (o todos) se repiten.

Digamos que el factor $a_1x + b_1$ se repite m veces, es decir,

$$Q(x) = (a_1x + b_1)^m (a_2x + b_2) \cdots (a_nx + b_n)$$

$$\text{Entonces hacemos } \frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_1}{(a_1x+b_1)^m} + \frac{A_2}{(a_1x+b_1)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_{m-1}}{(a_1x+b_1)^2} + \frac{A_m}{a_1x+b_1} + \frac{A_{m+1}}{a_2x+b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

Ejemplo.

$$\int \frac{(x^3-1)dx}{x^2(x-2)^3} = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2} + \frac{E}{(x-2)^3} \right) dx \quad \text{EXCELENTE!!}$$

$$\int \frac{(x^3-1)dx}{x^2(x-2)^3} = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{Bx}{x^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{Dx+E}{(x-2)^2} + \frac{Fx^2+Gx+H}{(x-2)^3} \right) dx \quad \text{MAL!!}$$

CASO 3. Los factores de $Q(x)$ son de grado mayor que 1 y ninguno se repite. Es decir,

$$Q(x) = (c_1x^r + c_2x^{r-1} + \dots + c_{r-1}x + c_r) \dots (d_1x^t + d_2x^{t-1} + \dots + d_{t-1}x + d_t)$$

Entonces hacemos

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &\equiv \frac{A_1x^{r-1} + \dots + A_{r-1}x + A_r}{c_1x^r + c_2x^{r-1} + \dots + c_{r-1}x + c_r} + \dots \\ &\quad + \frac{B_1x^{t-1} + \dots + B_{t-1}x + B_t}{d_1x^t + d_2x^{t-1} + \dots + d_{t-1}x + d_t} \end{aligned}$$

Donde $A_1, \dots, A_{r-1}, A_r, B_1, \dots, B_{t-1}, B_t$ son las constantes que vamos a buscar en el siguiente paso.

Ejemplo.

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 10x + 7}{(x^2 + 2x + 2)(x^3 + 2x^2 + 1)} dx = \int \left(\frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{Cx^2 + Dx + E}{x^3 + 2x^2 + 1} \right) dx$$

CASO 4. Los factores de $Q(x)$ son de grado mayor que 1 y algunos (o todos) se repiten.

Hacemos lo mismo que en el caso 2 combinado con el caso 3. Por ejemplo, si tenemos un término $c_1x^r + c_2x^{r-1} + \dots + c_{r-1}x + c_r$ que se repite m veces, entonces haremos:

$$\begin{aligned} &= \frac{A_1x^{r-1} + \dots + A_{r-1}x + A_r}{(c_1x^r + c_2x^{r-1} + \dots + c_{r-1}x + c_r)^m} \\ &\quad + \frac{B_1x^{r-1} + \dots + B_{r-1}x + B_r}{(c_1x^r + c_2x^{r-1} + \dots + c_{r-1}x + c_r)^{m-1}} + \dots \\ &\quad + \frac{D_1x^{r-1} + \dots + D_{r-1}x + D_r}{c_1x^r + c_2x^{r-1} + \dots + c_{r-1}x + c_r} \end{aligned}$$

Ejemplo:

$$\int \frac{x-2}{x(x^2-4x+5)^2} dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2-4x+5)^2} \right) dx$$

MALII

$$\int \frac{x-2}{x(x^2-4x+5)^2} dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-4x+5} + \frac{Dx+E}{(x^2-4x+5)^2} \right) dx$$

EXCELENTEII

MI TRUCO FAVORITO usando ésta técnica:

Cuando apliques el caso 3 y 4, toma en cuenta la derivada de los términos de grado mayor a 1 para formar las fracciones parciales... esto te ahorrará pasos al integrar más adelante!

En el ejemplo anterior, observa que $\frac{d}{dx}(x^2 - 4x + 5) = 2x - 4$

Entonces es mejor todavía hacer:

$$\int \frac{x-2}{x(x^2-4x+5)^2} dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B(2x-4)+C}{x^2-4x+5} + \frac{D(2x-4)+E}{(x^2-4x+5)^2} \right) dx$$

Porqué? Porque así te estás anticipando a formar la du de cada fracción parcial en un solo paso, no es genial? :-D

EJERCICIOS RESUELTOS

$$\int \frac{5x^2 - 11x + 5}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} dx = \int \frac{5x^2 - 11x + 5}{(x-2)(x^2 - 2x + 1)} dx = \int \frac{5x^2 - 11x + 5}{(x-2)(x-1)^2} dx$$

no se puede factorizar si se puede factorizar

$$= \int \left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \right) dx$$

Por lo tanto:

$$A(x-1)^2 + B(x-2)(x-1) + C(x-2) = 5x^2 - 11x + 5$$

$$= A[x^2 - 2x + 1] + B[x^2 - 3x + 2] + C[x - 2]$$

$$= (A+B)x^2 + (-2A-3B+C)x + (A+2B-2C)$$

Formamos las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} A+B &= 5 \\ -2A-3B+C &= -11 \\ A+2B-2C &= 5 \end{aligned} \right\} \text{Resolviendo el sistema de ecuaciones:}$$

$$A=3, B=2, C=1$$

$$= \int \left(\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx = 3 \int \frac{1}{x-2} dx + 2 \int \frac{1}{x-1} dx + \int (x-1)^{-2} dx$$

$$= 3 \ln(x-2) + 2 \ln(x-1) - \frac{1}{x-1} + C = \ln[(x-2)^3(x-1)^2] - \frac{1}{x-1} + C$$

$$\int \frac{x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 7}{x^3 + x^2 - 5x + 3} dx = \int \left(x+2 + \frac{-2x^2 + 3x + 1}{x^3 + x^2 - 5x + 3} \right) dx$$

$\frac{P(x)}{Q(x)}$; $P(x) > Q(x)$ Hacemos división sintética

$$= \int \left(x+2 + \frac{-2x^2 + 3x + 1}{(x+3)(x^2 - 2x + 1)} \right) dx = \int \left(x+2 + \frac{-2x^2 + 3x + 1}{(x+3)(x-1)^2} \right) dx$$

$$= \int \left(x+2 + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+3} \right) dx$$

Por lo tanto:

$$A(x-1)(x+3) + B(x+3) + C(x-1)^2 = -2x^2 + 3x + 1$$

$$= A[x^2 + 2x - 3] + B[x + 3] + C[x^2 - 2x + 1]$$

$$= (A+C)x^2 + (2A+B-2C)x + (-3A+3B+C) = -2x^2 + 3x + 1$$

Formamos las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} A+C &= -2 \\ 2A+B-2C &= 3 \\ -3A+3B+C &= 1 \end{aligned} \right\} \text{Resolviendo el sistema de ecuaciones:}$$

$$A = -\frac{3}{8}, B = \frac{1}{2}, C = -\frac{13}{8}$$

$$= \int \left(x+2 + \frac{-3/8}{x-1} + \frac{1/2}{(x-1)^2} + \frac{-13/8}{x+3} \right) dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{8} \ln(x-1) - \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{13}{8} \ln(x+3) + C$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2(x-1)} - \ln \left[(x-1)^{3/8} (x+3)^{13/8} \right] + C$$

$$\int \frac{x^2+2x-1}{27x^3-1} dx = \int \frac{x^2+2x-1}{(3x-1)(9x^2+3x+1)} dx = \int \left(\frac{A}{3x-1} + \frac{B(18x+3)+C}{9x^2+3x+1} \right) dx$$

se puede factorizar

Por lo tanto, $A(9x^2+3x+1) + (18Bx+3B+C)(3x-1)$
 $= (9A+54B)x^2 + (3A-9B+3C)x + (A-3B-C) = x^2+2x-1$

Formamos las ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 9A+54B = 1 \\ 3A-9B+3C = 2 \\ A-3B-C = -1 \end{array} \right\} \text{Resolviendo el sistema de ecuaciones:}$$

$$A = -2/27, B = 5/162, C = 5/6$$

$$= \int \left(\frac{-2/27}{3x-1} + \frac{5/162(18x+3)+5/6}{9x^2+3x+1} \right) dx = -\frac{2}{27} \int \frac{1}{3x-1} dx + \frac{5}{162} \int \frac{18x+3}{9x^2+3x+1} dx$$

$$+ \frac{5}{6} \int \frac{dx}{9x^2+3x+1}$$

La integral complicada aquí, la resolvemos aparte:

$$\int \frac{dx}{9x^2+3x+1} = \int \frac{dx}{(3x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{3a} \tan^{-1} \frac{u}{a}$$

factorizamos $u = 3x + \frac{1}{2}$ y $du = 3dx$
 $a = \sqrt{\frac{3}{4}}$

$$= -\frac{2}{27} \frac{1}{3} \int \frac{3}{3x-1} dx + \frac{5}{162} \int \frac{18x+3}{9x^2+3x+1} dx + \frac{5}{6} \left[\frac{2}{3\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{6x+1}{\sqrt{3}} \right]$$

$$= \boxed{-\frac{2}{81} \ln(3x-1) + \frac{5}{162} \ln(9x^2+3x+1) + \frac{5}{9\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{6x+1}{\sqrt{3}} + C}$$

$$= \ln \frac{(9x^2+3x+1)^{5/162}}{(3x-1)^{2/81}} + \frac{5}{9\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{6x+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$\int \frac{e^{5x}}{(e^{2x}+1)^2} dx \quad \begin{array}{l} \text{Si desarrollamos} \\ (e^{2x}+1)^2 = e^{4x} + 2e^{2x} + 1 \\ \text{nos damos cuenta que en} \\ \frac{P(x)}{Q(x)}; P(x) > Q(x) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{haciendo} \\ \text{división} \\ \text{síntesis} \end{array} \rightarrow \int \left(e^x + \frac{-2e^{3x}-e^x}{(e^{2x}+1)^2} \right) dx$$

Ahora si, aplicamos la técnica:

$$= \int \left(e^x + \frac{Ae^x+B}{(e^{2x}+1)^2} + \frac{Ce^x+D}{e^{2x}+1} \right) dx$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (Ae^x+B) + (Ce^x+D)(e^{2x}+1) \\ = Ce^{3x} + De^{2x} + (A+C)e^x + (B+D) \\ = -2e^{3x} - e^x \end{aligned}$$

Formamos las ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} C = -2 \\ D = 0 \\ A + C = -1 \\ B + D = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = 1 \\ B = 0 \end{array}$$

$$= \int \left(e^x + \frac{e^x}{(e^{2x}+1)^2} + \frac{-2e^x}{e^{2x}+1} \right) dx$$

Son integrales laboriosas, vamos a hacer cada una por separado.

$$\int \frac{e^x}{(e^{2x}+1)^2} dx = \int \frac{du}{(u^2+1)^2}$$

Para entenderla mejor, hacemos $u = e^x$ y $du = e^x dx$

Vamos a aplicar sustitución trigonométrica $\boxed{u^2+1}$ entonces $u = \tan \theta$ y $du = \sec^2 \theta d\theta$

$$= \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{(\tan^2 \theta + 1)^2} = \int \frac{\sec^2 \theta}{\sec^4 \theta} d\theta = \int \frac{1}{\sec^2 \theta} d\theta = \int \cos^2 \theta d\theta = \int \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int d\theta + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \cos 2\theta \cdot 2 d\theta = \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta + C = \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \cdot \cos \theta + C$$

$$= \frac{1}{2} \tan^{-1} u + \frac{1}{2} \frac{u}{u^2+1} + C = \frac{1}{2} \tan^{-1} e^x + \frac{1}{2} \frac{e^x}{e^{2x}+1} + C$$

buscar en la tabla

Ahora resolvamos:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx = \int \frac{du}{u^2+1} \xrightarrow[\text{de fórmula}]{\text{se resuelve directo}} \tan^{-1} u + C = \tan^{-1} e^x + C$$

$u = e^x$
 $du = e^x dx$

Volviendo a nuestra integral original:

$$= \int e^x dx + \int \frac{e^x}{(e^{2x}+1)^2} dx - 2 \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx = e^x + \frac{1}{2} \tan^{-1} e^x + \frac{1}{2} \frac{e^x}{e^{2x}+1}$$

$$- 2 \tan^{-1} e^x + C = \boxed{e^x - \frac{3}{2} \tan^{-1} e^x + \frac{1}{2} \frac{e^x}{e^{2x}+1} + C}$$

Ya que podríamos hacer $u = \tan x$ y $du = \sec^2 x dx$

$$= \int \frac{(\sec^2 x + 1) \sec^2 x}{1 + \tan^3 x} dx$$

hay que convertir todo a "tan x" y esto no lo tocamos

$$= \int \frac{(\tan^2 x + 1 + 1) \sec^2 x}{1 + \tan^3 x} dx$$

factorizando

$$= \int \frac{\tan^2 x + 2}{(\tan x + 1)(\tan^2 x - \tan x + 1)} \sec^2 x dx$$

Aplicando Fracciones Parciales:

$$= \int \left(\frac{A}{\tan x + 1} + \frac{B \tan x + C}{\tan^2 x - \tan x + 1} \right) \sec^2 x dx$$

Por lo tanto:

$$A(\tan^2 x - \tan x + 1) + (B \tan x + C)(\tan x + 1) = \tan^2 x + 2$$

$$= (A + B) \tan^2 x + (-A + B + C) \tan x + (A + C) = \tan^2 x + 2$$

Formamos las ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} A + B = 1 \\ -A + B + C = 0 \\ A + C = 2 \end{array} \right\}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$A = 1$$

$$B = 0$$

$$C = 1$$

Entonces:

$$= \int \left(\frac{1}{\tan x + 1} + \frac{1}{\tan^2 x - \tan x + 1} \right) \sec^2 x dx = \int \frac{\sec^2 x dx}{\tan x + 1} + \int \frac{\sec^2 x dx}{(\tan x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

se factoriza

$$= \int \frac{1}{u} du + \int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \ln u + \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{v}{a} + C$$

$u = \tan x + 1$
 $du = \sec^2 x dx$

$v = \tan x - \frac{1}{2}$
 $a = \sqrt{\frac{3}{4}}$
 $dv = \sec^2 x dx$

$$= \ln(\tan x + 1) + \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \tan^{-1} \frac{\tan x - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C$$

$$= \ln(\tan x + 1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2 \tan x - 1}{\sqrt{3}} + C$$

$$\int \frac{6w^4 + 4w^3 + 9w^2 + 24w + 32}{(w^3 + 8)(w^2 + 3)} dw = \int \frac{6w^4 + 4w^3 + 9w^2 + 24w + 32}{(w+2)(w^2 - 2w + 4)(w^2 + 3)} dw$$

Antes de aplicar Fracciones Parciales en ésta:

$$= \int \left(\frac{A}{w+2} + \frac{B(2w-2)+C}{w^2-2w+4} + \frac{2Dw+E}{w^2+3} \right) dw$$

1) $\frac{P(x)}{Q(x)}$; $P(x) < Q(x)$ OK

2) Verificar que el numerador no se puede factorizar en ningún factor del denominador y simplificar OK

3) En el denominador, si se puede factorizar: $(w^3 + 8) = (w+2)(w^2 - 2w + 4)$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} & A(w^2 - 2w + 4)(w^2 + 3) + [B(2w - 2) + C](w + 2)(w^2 + 3) \\ & + (2Dw + E)(w^2 - 2w + 4) \\ & = (A + 2B + 2D)w^4 + (-2A + 2B + C + E)w^3 \\ & + (7A + 2B + 2C)w^2 + (-6A + 6B + 3C + 16D)w \\ & + (12A - 12B + 6C + 8E) = 6w^4 + 4w^3 + 9w^2 + 24w + 32 \end{aligned}$$

Formamos las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} A + 2B + 2D &= 6 \\ -2A + 2B + C + E &= 4 \\ 7A + 2B + 2C &= 9 \\ -6A + 6B + 3C + 16D &= 24 \\ 12A - 12B + 6C + 8E &= 32 \end{aligned} \right\}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= 1 \\ C &= 0 \\ D &= 3/2 \\ E &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int \left(\frac{1}{w+2} + \frac{2w-2}{w^2-2w+4} + \frac{\frac{3}{2}(2w)+4}{w^2+3} \right) dw = \int \frac{1}{w+2} dw + \int \frac{2w-2}{w^2-2w+4} dw + \frac{3}{2} \int \frac{2w}{w^2+3} dw \\ &+ 4 \int \frac{1}{w^2+3} dw = \ln(w+2) + \ln(w^2-2w+4) + \frac{3}{2} \ln(w^2+3) + \frac{4}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{w}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

$$= \ln[(w^3 + 8)(w^2 + 3)^{3/2}] + \frac{4}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{w}{\sqrt{3}} + C$$

acordarse que: $(w+2)(w^2-2w+4) = w^3 + 8$